DISEÑO Y ANALISIS DE SERIES DE EXPERIMENTOS DE BLOQUES INCOMPLETOS

Angel Martínez Garza

En la investigación agrícola es frecuente establecer series de experimentos similares. Usualmente se considera como solución de diseño, la siguiente: si se evalúan t tratamientos en cada una de p localidades, los tratamientos se alojan en diseños de r bloques completos al azar, con aleatorizaciones independientes para cada localidad. La solución anterior es relativamente sencilla, pero deja sin resolver algunas situaciones prácticas. La más común ocurre, por ejemplo, cuando el número t de tratamientos es grande; hacer bloques completos en este caso, puede inducir un exceso de variabilidad no aleatoria dentro de los propios bloques, reduciendo la sensibilidad de la serie de experimentos para detectar diferencias significativas. En tal caso, el diseño de una serie de experimentos que controle más eficientemente la variabilidad sistemática del material experimental, tendrá que basarse en el empleo de diseños de bloques incompletos. La alternativa anterior de diseño es mejor que la serie de bloques completos al azar. Sin embargo, las reglas de diseño, y todavía más, los métodos de análisis de las series de experimentos en bloques incompletos, por lo general son poco conocidos por los agrónomos investigadores.

El presente trabajo está dedicado, por consiguiente, a la descripción de las técnicas de diseño y análisis de las series de experimentos de bloques incompletos, centrando la discusión al caso en que los diseños básicos son látices.

Las ideas se desarrollarán sistemáticamente. Así, la primera sección se dedicará a la descripción de los látices; la segunda cubrirá el problema del diseño de series de látices; la tercera se referirá al análisis de los látices; y por último, se cubrirá el aspecto del análisis de las series de látices.

LATICES O EXPERIMENTOS PSEUDOFACTORIALES

Los látices son diseños experimentales de bloques incompletos, de los cuales, los más usuales, comprenden la evaluación de $p^2 = t$ tratamientos. Se caracterizan por que tanto los métodos de diseño como los de análisis se basan en la teoría de

[1] Director de Investigación del Centro de Estadística y Cálculo del Colegio de Postgraduados. Apdo. Postal 358, C.P. 56230 Chapingo, Edo. de México.

la experimentación factorial, y de allí el nombre que a veces se les da, de experimentos pseudofactoriales. En particular, los látices para la comparación de p^2 tratamientos, también llamados *látices bidimensionales*, basan sus reglas de diseño y análisis en los experimentos factoriales p^2, es decir, en los experimentos con dos factores, cada uno en p niveles. A continuación se discutirán este tipo de experimentos, y aunque es posible referirse también a los experimentos para controlar variabilidad de acuerdo con dos criterios, sólo se cubrirá el caso de los diseños que controlan variabilidad de acuerdo con un criterio.

Látices para p^2 tratamientos, p primo

Cuando p es un número primo, pueden construirse látices bidimensionales para el control de la variabilidad de acuerdo con un solo criterio, que dan lugar hasta un total de $p+1$ repeticiones típicas, constando cada una de p bloques, de p unidades experimentales. Los tratamientos se denotan simbólicamente en la forma (x_1,x_2), donde tanto x_1 como x_2 toman alguno de los valores: $0,1,2,\ldots,p-1$ es decir para representar a los tratamientos se emplea la notación factorial, como si fuera el caso de un experimento factorial con dos factores, cada uno en p niveles (representados por los números $0,1,2,\ldots, p-1$). La composición de los bloques se deriva a partir de los polinomios x_1,x_2 y $x_1+\lambda x_2$ donde λ toma valores $1,2,\ldots, p-1$, reduciendo los resultados en aritmética módulo p; es decir, substituyendo el valor de los polinomios para todas las posibles combinaciones (x_1,x_2), por el residuo que se obtiene al dividir entre p. Procediendo de esta manera, los residuos de los polinomios resultan ser los números $0,1,2,\ldots, p-1$.

Considérese la construcción del látice para $3^2= 9$ tratamientos. En este caso $p= 3$; se pueden obtener, por consiguiente, hasta $p+1= 4$ repeticiones típicas y los tratamientos son los siguientes 9 pares de valores: (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2) y (2,2). Los polinomios a evaluar son x_1,x_2, x_1+x_2 y x_1+2x_2, los cuales, al reducirse en aritmética módulo 3, tomarán alguno de los valores 0, 1 y 2. Los resultados de estos cálculos se muestran en el Cuadro 1, en el cual cada polinomio define una repetición típica, definiéndose 3 bloques de tamaño 3; cada uno de los valores 0, 1 y 2 determina los tratamientos que van juntos en un bloque. Así por ejemplo, el primer bloque de la repetición típica definida por el polinomio x_1 comprende los tratamientos (0,0), (0,1) y (0,2); el segundo bloque de la repetición típica definida por x_1 comprende los tratamientos (1,0), (1,1) y (1,2); el tercer bloque de la repetición típica definida por x_1 comprende los tratamientos (2,0), (2,1) y (2,2). Si se emplean los números de referencia

Cuadro 1. Diseño del látice 3x3

Nº	Tratamientos	Polinomios a evaluar			
		x_1	x_2	x_1+x_2	x_1+2x_2
1.	(0,0)	0	0	0	0
2.	(1,0)	1	0	1	1
3.	(2,0)	2	0	2	2
4.	(0,1)	0	1	1	2
5.	(1,1)	1	1	2	0
6.	(2,1)	2	1	0	1
7.	(0,2)	0	2	2	1
8.	(1,2)	1	2	0	2
9.	(2,2)	2	2	1	0

del 1 al 9, que identifican las combinaciones (x_1,x_2), la repetición típica definida por x_1, es dada por:

Bloque			
1	1	4	7
2	2	5	8
3	3	6	9

La Figura 1 presenta las 4 repeticiones típicas del látice para 3x3= 9 tratamientos. Un experimento que ensaya 2 repeticiones típicas cualesquiera de esa Figura constituye un látice simple 3x3. Si se ensayan3 repeticiones cualesquiera, el experimento resultante es un látice triple 3x3; pero si se emplean las 4 repeticiones típicas, el experimento es un látice balanceado 3x3.

En el caso general con p primo, $2,3,4,\ldots,$ hasta $p+1$ repeticiones típicas, generan los látices simple, triple, cuádruple ,..., hasta el balanceado pxp, respectivamente.

Latices para s^2 tratamientos, $s= p^m$, p primo

Cuando el número de tratamientos a ensayar es s^2, donde $s= p^m$, siendo p un número primo y m un entero positivo mayor que 1, también puedenconstruirse látices bidimensionales para el control de la variabilidad de acuerdo con un solo crite-

Bloque	Rep. I		
1	1	4	7
2	2	5	8
3	3	6	9

Bloque	Rep. II		
4	1	2	3
5	4	5	6
6	7	8	9

Bloque	Rep. III		
7	1	6	8
8	2	4	9
9	3	5	7

Bloque	Rep. IV		
10	1	5	9
11	2	6	7
12	3	4	8

Figura 1. Látice 3x3: repeticiones típicas

rio, obteniéndose hasta un total de $s+1$ repeticiones típicas, cada una de s bloques, de s unidades experimentales. La técnica de construcción es más complicada que la descrita para los látices pxp (con p primo), se basa en la existencia del campo de Galois para s elementos, los cuales se representan por polinomios de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}$, donde los coeficientes $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{m-1}$ toman alguno de los valores $0,1,2,\ldots,p-1$. Así por ejemplo, en el caso en que $s=2^2$, $p=2$ y $m=2$, las marcas del campo de Galois para $2^2=4$ elementos son los polinomios $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=x$ y $u_3=1+x$. Si en este caso los tratamientos se representan por pares de valores (x_1,x_2), donde tanto x_1 como x_2 toman alguno de los valores $0,1,2,3$ (con $3=s-1$), al evaluar los polinomios u_{x_1}, u_{x_2}, $u_{x_1}+u_1u_{x_2}$, $u_{x_1}+u_2u_{x_2}$, y $u_{x_1}+u_3u_{x_2}$, reduciendo módulos p y un polinomio primo del campo ($1+x+x^2$ en este caso), se obtiene el Cuadro 2 del cual puede derivarse la composición de los bloques para las $s+1=5$ repeticiones típicas, del látice balanceado $4x4$, usando los números de referencia que identifican los tratamientos. Los detalles de esta técnica pueden verse en Kempthorne (1952), o en Martínez (1980). La Figura 2 presenta la composición de los bloques, para cada una de las 5 repeticiones típicas del propio látice 4x4; en esta *figura* los números de referencia se emplean para denotar a los tratamientos.

Látices para p^2 tratamientos, caso general

Cuando p no es primo, ni potencia de un número primo, pueden generarse látices para p^2 tratamientos, hasta de 3 repeticiones típicas basándose en la construcción de un cuadro latino pxp. Por ejemplo, si $p=6$, en las celdas de un cuadro latino

Cuadro 2. Construcción de látice 4x4

Nº	Tratamientos (x_1, x_2)	u_{x_1}	u_{x_2}	$u_{x_1}+u_1u_{x_2}$	$u_{x_1}+u_2u_{x_2}$	$u_{x_1}+u_3u_{x_2}$
1.	(0,0)	u_0	u_0	u_0	u_0	u_0
2.	(0,1)	u_0	u_1	u_1	u_2	u_3
3.	(0,2)	u_0	u_2	u_2	u_3	u_1
4.	(0,3)	u_0	u_3	u_3	u_1	u_2
5.	(1,0)	u_1	u_0	u_1	u_1	u_1
6.	(1,1)	u_1	u_1	u_0	u_3	u_2
7.	(1,2)	u_1	u_2	u_3	u_2	u_0
8.	(1,3)	u_1	u_3	u_2	u_0	u_3
9.	(2,0)	u_2	u_0	u_2	u_2	u_2
10.	(2,1)	u_2	u_1	u_3	u_0	u_1
11.	(2,2)	u_2	u_2	u_0	u_1	u_3
12.	(2,3)	u_2	u_3	u_1	u_3	u_0
13.	(3,0)	u_3	u_0	u_3	u_3	u_3
14.	(3,1)	u_3	u_1	u_2	u_1	u_0
15.	(3,2)	u_3	u_2	u_1	u_0	u_2
16.	(3,3)	u_3	u_3	u_0	u_2	u_1

cualquiera 6x6, se insertan los número del 1 al 36, como se hace en la Figura 3, entonces, asociando tratamientos por hileras, columnas y letras latinas, se obtienen 3 repeticiones típicas del látice 6x6. Estas se presentan en la Figura 4.

Esquemas completos de los látices bidimensionales más usuales, pueden encontrarse en Cochran y Cox (1957) y Martínez (1988).

DISEÑO DE SERIES DE LATICES

Cuando se decide establecer una serie de experimentos en látices, sobre un conjunto de r localidades, lo más adecuado que puede hacer el investigador para efectuar un análisis estadístico sencillo es realizar *réplicas* de un esquema básico en cada una de las r localidades. A continuación se ilustra el procedimiento de diseño de las series de experimentos, cuando el látice es el esquema experimental básico empleado.

Bloque	Rep. I	Bloque	Rep. II	Bloque	Rep. III
1	1 2 3 4	5	1 5 9 13	9	1 6 11 16
2	5 6 7 8	6	2 6 10 14	10	2 5 12 15
3	9 10 11 12	7	3 7 11 15	11	3 8 9 14
4	13 14 15 16	8	4 8 12 16	12	4 7 10 13

Bloque	Rep. IV	Bloque	Rep. V
13	1 8 10 15	17	1 7 12 14
14	4 5 11 14	18	3 5 10 16
15	2 7 9 16	19	4 6 9 15
16	3 6 12 13	20	2 8 11 13

Figura 2. Látice 4x4: repeticiones típicas

A^{1}	B^{2}	C^{3}	D^{4}	E^{5}	F^{6}
F^{7}	A^{8}	B^{9}	C^{10}	D^{11}	E^{12}
E^{13}	F^{14}	A^{15}	B^{16}	C^{17}	D^{18}
D^{19}	E^{20}	F^{21}	A^{22}	B^{23}	C^{24}
C^{25}	D^{26}	E^{27}	F^{28}	A^{29}	B^{30}
B^{31}	C^{32}	D^{33}	E^{34}	F^{35}	A^{36}

Figura 3. Construcción del látice 6x6

Definición del esquema básico

Como se vió en la sección anterior, cuando s es primo o potencia de un número primo, es posible construir un látice unirrestriccional para s^2 tratamientos, de $s+1$ repeticiones típicas. Así, s es primo o potencia de un número primo, cuando s es igual a 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17 y 19 en los casos más usuales. Cuando s es un número compuesto, lo cual ocurre cuando s es igual a 6, 10,12,14, 15, 18 y 20 en los casos más frecuentes, es posible construir hasta 3 repeticiones típicas del látice correspondiente. De aquí, un látice que emplea 2 repeticiones típicas constituye un látice simple; un látice que emplea 3 repeticiones típicas, es un lá-

Bloque	Rep. I					
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	19	20	21	22	23	24
5	25	26	27	28	29	30
6	31	32	33	34	35	36

Bloque	Rep. II					
7	1	7	13	19	25	31
8	2	8	14	20	26	32
9	3	9	15	21	27	33
10	4	10	16	22	28	34
11	5	11	17	23	29	35
12	6	12	18	24	30	36

Bloque	Rep. III					
13	1	8	15	22	29	36
14	2	9	16	23	30	31
15	3	10	17	24	25	32
16	4	11	18	19	26	33
17	5	12	13	20	27	34
18	6	7	14	21	28	35

Figura 4. Látice triple 6x6

tice triple, etc. Ahora bien, cuando de un látice simple se hacen 2, 3 o más aleatorizaciones distintas de cada repetición típica, se obtiene el látice simple duplicado, triplicado, etc. Similarmente, cuando de cada repetición típica de un látice triple, se hacen 2, 3 o más aleatorizaciones distintas, se obtiene el látice triple duplicado, triplicado; etc.

Supóngase que se desean evaluar 9 tratamientos, en un látice simple 3x3. Se pueden elegir las repeticiones típicas I y II de la Figura 1, con la observación de que dos repeticiones típicas cualesquiera de esa figura tienen el mismo valor. Para aleatorizar los tratamientos sobre las unidades experimentales se procede como sigue: para cada repetición típica se sortean grupos de tratamientos sobre los bloques del campo, y luego se sortean los tratamientos de cada grupo sobre las parcelas del bloque que le fue asignado al grupo. De aquí, después de aleatorizar, el látice simple para 9 tratamientos se vería como el esquema que muestra la Figura 5.

Si el problema es proyectar un látice 3x3 de 4 repeticiones completas, pueden

Bloque	Rep. I			Bloque	Rep. II		
(2)	6	5	4	(6)	9	3	6
(3)	7	9	8	(5)	2	8	5
(1)	2	1	3	(4)	4	7	1

Figura 5. Diseño de un látice simple 3x3

ensayarse las 4 repeticiones típicas del látice balanceado. Alternativamente, aunque desde el punto de vista estadístico esta opción es menos eficiente que la anterior, pueden elegirse dos repeticiones típicas del látice 3x3, duplicándolas; es decir, elegidas dos repeticiones típicas cualesquiera, de las 4 que son posibles de construir en este caso, se hacen dos aleatorizaciones independientes de cada repetición típica. Así por ejemplo, si de la Figura 1 se eligen las repeticiones típicas II y IV, para proyectar un látice simple duplicado 3x3, después de la aleatorización se obtiene el esquema de la Figura 6.

Réplica 1				Réplica 2			
Bloque	Rep. I			Bloque	Rep. II		
(4)	4	6	5	(5)	3	2	1
(6)	8	7	9	(4)	5	6	4
(5)	3	1	2	(6)	8	9	7
	Rep. III				Rep. IV		
(12)	8	3	4	(12)	3	4	8
(10)	5	1	9	(11)	7	6	2
(11)	6	7	2	(10)	1	9	5

Figura 6. Diseño de un látice simple duplicado 3x3

Series de látices

Cuando hay necesidad de emplear diseños de bloques incompletos, como es el caso de los látices, lo mejor que puede hacer el investigador para proyectar una serie de experimentos cuya interpretación sea sencilla, es elegir un esquema básico y hacer una réplica en cada localidad, realizando aleatorizaciones independientes. Así, el esquema básico puede ser un látice simple, triple o cuádruple, etc., el cual se repite en cada una de las localidades, con distinta aleatorización. Este artificio fija la composición de los bloques, de tal manera que si un bloque particular de la primera localidad ensaya ciertos tratamientos, en cada una de las localidades restantes se encontrará un bloque con la misma composición de tratamientos que el bloque seleccionado. La estructura de la serie de experimentos resultante, será un látice multiplicado, tantas veces, como localidades sean consideradas.

ANALISIS DE LOS LATICES BIDIMENSIONALES

Supóngase que se desea analizar los resultados experimentales de un látice que incluye q repeticiones típicas, donde q puede ser igual a $2,3,\ldots, p+1$, cuando p es primo o potencia de un número primo, o bien, q puede ser igual a 2 ó 3 en cualquier otro caso. El experimento comprende la comparación de p^2 tratamientos, en bloques de p unidades experimentales. Considérese, para ilustrar la situación, el análisis de los resultados experimentales del látice triple 3x3 que se presentan en la Figura 7, construida usando datos artificiales. Puesto que se trata de un látice tri-

Rep. I			Rep. II			Rep. III		
8	7	9	5	2	8	5	9	1
31	24	12	45	42	78	21	82	51
1	3	2	6	3	9	8	3	4
35	54	62	27	29	13	75	53	22
6	5	4	7	4	1	7	3	6
48	91	62	81	62	93	79	99	1

Figura 7. Látice triple 3x3

ple 3x3, en el cual se incluye la primera, la segunda y la cuarta repeticiones típicas del diseño de la Figura 1, se tiene $q= 3$ y $p=3$.

Para realizar el análisis del experimento, recuperando la información interbloque, se procede como se describe en Martínez (1988). Los pasos por seguir para la ejecución del análisis son:

1. Se ordenan los resultados como se muestra en el Cuadro 3, obteniendo los totales de la característica en estudio para los bloques, las repeticiones completas, los tratamientos y el gran total. Para el presente ejemplo, esta información apare

ce en los Cuadros 3 y 4.

2. Calcúlense el factor de corrección, C; la suma de cuadrados total corregida, SCTotal; la suma de cuadrados debida a las repeticiones completas, SCR; la suma de cuadrados debida a bloques dentro de repeticiones, SC(BDR); y la suma de cuadrados debida a tratamientos, ignorando bloques, SCT. Para el ejemplo, se tiene:

$$C = \frac{G^2}{qp^2} = \frac{1372^2}{3 \times 3^2} = 69717.93,$$

$$SCTotal = \Sigma y^2 - C = 35^2 + 62^2 + \ldots + 75^2 - C$$

$$= 89488 - 69717.93 = 19770.07,$$

$$SCR = \frac{\Sigma R^2}{p^2} - C = \frac{419^2 + 470^2 + 483^2}{9} - C$$

$$= 69972.22 - 69717.93 = 254.29,$$

$$SC(BDR) = \frac{\Sigma Y_{i.}^2}{p} - \frac{\Sigma R^2}{p^2}$$

$$= \frac{151^2 + 201^2 + \ldots + 150^2}{3} - \frac{419^2 + 470^2 + 483^2}{9}$$

$$= 77876.67 - 69972.22 = 7904.45,$$

$$SCT = \frac{\Sigma T^2}{rq} - C = \frac{179^2 + 203^2 + \ldots + 107^2}{3} - C$$

$$= 74216.00 - 69717.93 = 4498.07.$$

3. Se calculan para cada bloque las cantidades C_i: C_i= (*suma de los totales de los tratamientos que aparecen en el bloque*)- $qY_{i.}$. Así, para el bloque 1 se tiene:

$$C_1 = 179 + 203 + 136 - 3 \times 151 = 65.$$

Como comprobación de la aritmética realizada, debe tenerse que la suma de las C_i sobre todos los bloques del experimento debe ser cero. Calculadas las C_i se obtiene la suma de cuadrados debida a bloques (dentro de repeticiones) eliminando tratamientos, $SC(BET)$:

Cuadro 3. Resultados experimentales de un látice triple 3x3

Repetición	Bloque	Tratamientos			$y_{i.}$	C_i	μC_i
	1	1 35	2 62	3 54	151	65	+ 7.74
I	2	4 62	5 91	6 48	201	-224	-26.69
	3	7 24	8 31	9 12	67	274	+32.64
					R_1= 419	ΣC_i= 115	
	4	1 93	4 62	7 81	236	-199	-23.71
II	5	2 42	5 45	8 78	165	49	+ 5.84
	6	3 29	6 27	9 13	69	112	+13.34
					R_2= 470	$\Sigma_i C_i$=- 38	
	7	1 51	5 21	9 82	154	-19	- 2.26
III	8	2 99	6 1	7 79	179	-74	- 8.82
	9	3 53	4 22	8 75	150	16	+ 1.91
					R_3= 483 G=1372	ΣC_i=- 77	

$p= 3,\ q= 3,\ t= 9$

$$SC(BET) = \frac{\Sigma C_i^2}{pq(q-1)} - \frac{\Sigma_{rep}\ (\Sigma_i C_i)^2}{p^2 q(q-1)}$$

$$= \frac{65^2+(-224)^2+\ldots+16^2}{3\times3\times2} - \frac{115^2+(-38)^2+(-77)^2}{3^2\times3\times2}$$

$$= 10562.00-381.44= 10180.56.$$

Cuadro 4. Cálculo de las medias de tratamientos corregidas por los efectos de bloques

Tratamientos	Totales T_j	Correcciones μC_i I	II	III	Total Corregido	Media Corregida
1	179	+ 7.74	-23.71	- 2.26	160.77	53.59
2	203	+ 7.74	+ 5.84	- 8.82	207.76	69.25
3	136	+ 7.74	+13.34	+ 1.91	158.99	53.00
4	146	-26.69	-23.71	+ 1.91	97.51	32.50
5	157	-26.69	+ 5.84	- 2.26	133.89	44.63
6	76	-26.69	+13.34	- 8.82	53.83	17.94
7	184	+32.64	-23.71	- 8.82	184.11	61.37
8	184	+32.64	+ 5.84	+ 1.91	224.39	74.80
9	107	+32.64	+13.34	- 2.26	150.72	50.24
Sumas	1372				1371.97	

4. Se obtiene el análisis de varianza del Cuadro 5, donde la suma de cuadrados debida al error intrabloque, se obtiene por diferencia. Debe esperarse que E_b, el cuadrado medio para bloques eliminando tratamientos, sea mayor que E_e, el cuadrado medio del error intrabloque. Si éste es el caso, se calcula el factor de ponderación:

$$\mu = \frac{E_b - E_e}{p(q-1)E_b}.$$

Para el ejemplo, se tiene:

$$\mu = \frac{1696.76 - 483.71}{3x2x1696.76} = 0.11915.$$

Multiplicando los C_i por μ se obtienen las correcciones debidas a los bloques; las cantidades μC_i aparecen en la última columna del Cuadro 3.

5. Haciendo uso de las cantidades μC_i apropiadas, se obtienen los totales ajustados de tratamientos por medio de la relación:

$$\hat{T} = T + \mu(C_I + C_{II} + \ldots + C_q)$$

Cuadro 5. Análisis de varianza interbloque

Fuentes de variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios
Repeticiones	2	254.29	
Bloques eliminando tratamientos	6	10180.56	1696.76= E_b
Tratamientos ignorando bloques	8	4498.07	
Error intrabloque	10	4837.15	483.71= E_e
Total	26	19770.07	

Las medias de tratamientos se obtienen dividiendo los totales correspondientes, entre q. Para el ejemplo bajo consideración, en el Cuadro 4 se presentan tanto los totales como las medias ajustadas. Así, para el tratamiento 1, se tiene:

$$\hat{T}_1 = T_1 + \mu C_1 + \mu C_4 + \mu C_7$$

$$= 179+7.74-23.71-2.26= 160.77;$$

de aquí:

$$\hat{t}_1 = \frac{T_1}{q} = \frac{160.77}{3} = 53.59.$$

6. Una prueba de F para la hipótesis de nulidad de los efectos de tratamientos, se obtiene como sigue: en el Cuadro 5 substitúyase bloques eliminando tratamientos por bloques (dentro de repeticiones) ignorando tratamientos, cuya suma de cuadrados, $SC(BDR)= 7904.45$, se calculó en el paso 2 del método de análisis. Hecho lo anterior, la suma de cuadrados debida a tratamientos eliminando bloques, $SC(TEB)$, se obtiene por diferencia como si fuera ésta, el término de error. Se procede como es usual, hasta obtener el análisis de varianza del Cuadro 6. La F calculada es la estadística de prueba para la hipótesis H_0: $\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_t$, contra la alternativa H_1: $\tau_j \neq \tau_{j'}$, para al menos un par de índices j y j', con $j \neq j'$.

La varianza de la diferencia entre dos medias de tratamientos que aparecen juntos en un bloque es:

Cuadro 6. Análisis de varianza intrabloque

Fuentes de variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios
Repeticiones	2	254.29	
Bloques (dentro de reps.) ignorando tratamientos	6	7904.45	
Tratamientos eliminando bloques	8	6774.18	846.77
Error intrabloque	10	4837.15	483.71
Total	26	19770.07	

$$\frac{2}{p}\left\{\frac{q-1}{w'+(q-1)w}+\frac{p-(q-1)}{qw}\right\};$$

La varianza de la diferencia entre dos medias de tratamientos que no aparecen juntos en un bloque, es:

$$\frac{2}{p}\left\{\frac{q}{w'+(q-1)w}+\frac{p-1}{qw}\right\}$$

donde $w = 1/E_e$ y $w' = (q-1)/(qE_b-E_e)$.

ANALISIS DE SERIES DE LATICES

Cuando se define un esquema básico de q repeticiones típicas ($q=2$ para el látice simple, $q=3$ para el látice triple, etc.), el cual se aplica con distinta aleatorización, sobre cada una de r localidades, el análisis combinado de la serie de r experimentos es relativamente fácil de obtener. La serie de experimentos constituirá un látice de q repeticiones típicas, con r réplicas del esquema básico, cuyo análisis está descrito en Martínez (1988). Una variante en el caso de las series de experimentos en látices es la siguiente: debe aparecer en el análisis combinado, una fuente de variación debida a la interacción tratamientos x experimentos. Enseguida se discute el análisis de las series de látices, comenzando con una presentación compacta del análisis de los propios látices, con réplicas del esquema básico.

Análisis de los látices con réplicas del esquema básico

Supóngase que una segunda réplica del látice triple 3x3, que comprenden las repeticiones típicas I, II y IV de la Figura 1, produce los resultados que se presentan en la Figura 8. Juntos, los resultados del experimento que se presenta en la Figura 7, con aquellos del experimento de la Figura 8, constituyen un látice triple duplicado 3x3, cuyo análisis se describe a continuación:

Rep. I			Rep. II			Rep. III		
3	1	2	3	9	6	6	2	7
99	17	61	85	36	44	30	29	65
5	4	6	2	8	5	4	8	3
73	32	40	96	76	99	7	58	72
8	9	7	4	1	7	1	9	5
52	77	24	6	22	35	38	40	44

Figura 8. Segunda réplica del látice triple 3x3

1. Se obtienen los totales de la característica en estudio para los bloques, las repeticiones completas, los tratamientos y el gran total, calculando, además los totales de tratamientos sobre todas las réplicas del esquema básico, como se ilustra en el Cuadro 7.

2. Calcúlense el factor de corrección, C; la suma de cuadrados total corregida, *SCTotal*; la suma de cuadrados debida a las repeticiones completas, *SCR*; la suma de cuadrados bloques dentro de repeticiones, *SC(BDR)*; y la suma de cuadrados debida a tratamientos. En el ejemplo se obtiene, sucesivamente

$$C = \frac{G^2}{rqp^2} = \frac{2729^2}{2x3x9} = 13915.57,$$

$$SCTotal = \Sigma y^2 - C = 35^2+62^2+\ldots+58^2 - C = 39083.43,$$

$$SCR = \frac{\Sigma R^2}{p^2} = C = \frac{419^2+470^2+\ldots+383^2}{9} - C = 1091.65,$$

$$SC(BDR) = \frac{\Sigma y_{i.}^2}{p} - \frac{\Sigma R^2}{p^2} = \frac{151^2+201^2+\ldots+137^2}{3}$$

$$- \frac{419^2+470^2+\ldots\; 383^2}{9} = 15345.11,$$

$$SCT = \frac{\Sigma T^2}{rq} - C = \frac{256^2+389^2+\ldots+260^2}{2x3} - C = 9016.$$

Cuadro 7. Lãtice triple duplicado

Réplica 1			Réplica 2							
	Rep. I. A			Rep. I. A			Rep. I			
Bloque	Confundido	$Y_{i.}$	Bloque	Confundido	$Y_{i.}$	Bloque		$\Sigma Y_{i.}$	C_i	μC_i
	1 2 3			1 2 3			1 2 3			
1	35 62 54	151	1	17 61 99	177	1	52 123 153	328	+ 53	+ 5.52
	4 5 6			4 5 6			4 5 6			
2	62 91 48	201	2	32 73 40	145	2	94 164 88	346	− 284	− 29.60
	7 8 9			7 8 9			7 8 9			
3	24 31 12	67	3	24 52 77	153	3	48 83 89	220	+ 278	+ 28.98
	R_{A1} = 419			R_{A2} = 475			ΣR_A = 894		ΣC_i = + 47	
	Rep. II. B Confundido			Rep. II. B Confundido			Rep. II			
	1 4 7			1 4 7			1 4 7			
4	93 62 81	236	4	22 6 35	63	4	115 68 116	299	− 142	− 14 80
	2 5 8			2 5 8			2 5 8			
5	42 45 78	165	5	96 99 76	271	5	138 144 154	436	− 176	− 18.34
	3 6 9			3 6 9			3 6 9			
6	29 27 13	69	6	85 44 36	165	6	114 71 49	234	+ 140	+ 14.59
	R_{B1} = 470			R_{B2} = 499			ΣR_B = 969		ΣC_i = −178	
	Rep. III. AB Confundido			Rep. III. AB Confundido			Rep. III			
	1 5 9			1 5 9			1 5 9			
7	51 21 82	154	7	38 44 40	122	7	89 65 122	276	+ 61	+ 6.36
	2 6 7			2 6 7			2 6 7			
8	99 1 79	179	8	29 30 65	124	8	128 31 144	303	− 22	− 2 29
	3 4 8			3 4 8			3 4 8			
9	53 22 75	150	9	72 7 58	137	9	125 29 133	287	+ 92	+ 9.59
	R_{AB1} = 433			R_{AB2} = 383			ΣR_{AB} = 366		ΣC_i = + 131	
	G = 2 729									

$p = 3, q = 3, r = 2, t = 9$

$T_1 = 256$, $T_2 = 389$, $T_3 = 392$,

$T_4 = 191$, $T_5 = 373$, $T_6 = 190$,

$T_7 = 308$, $T_8 = 370$, $T_9 = 260$.

donde se ha tomado p (el tamaño del bloque) igual a 3, q (el número de repeticiones completas en una réplica del esquema básico), igual a 3, y a r (el número de réplicas del esquema básico), igual a 2.

3. En el Cuadro 7 se obtienen los totales de bloques típicos, las cantidades $\Sigma Y_{i.}$. Así, para el bloque 1 se tiene:

$$\Sigma Y_{1.} = Y_{1.}(\textit{réplica I}) + Y_{1.}(\textit{réplica II}) = 155+177 = 328$$

De aquí, la suma de cuadrados debida a la componente a está dada por:

$$SC(\textit{componente } a) = \frac{\sum\limits_i Y_{i.}^2}{p} - \frac{\sum\limits_i (\Sigma Y_{i.})^2}{rp} - \frac{\Sigma R^2}{p} + \frac{(\Sigma R)^2}{rp^2}$$

$$= \frac{151^2+201^2+\ldots+137^2}{3} - \frac{328^2+346^2+\ldots+287^2}{2\text{x}3} - \frac{419^2+470^2+\ldots+383^2}{9}$$

$$+ \frac{894^2+969^2+866^2}{2\text{x}9} = 10191.33$$

4. Para cada bloque típico se calculan las cantidades C_i:

C_i= (*suma de totales de tratamientos que aparecen en el bloque*) $- q(\Sigma Y_{i.})$.

Para el bloque 1 se tiene:

$$C_1 = (256+389+392) - 3\text{x}328 = 53.$$

Como comprobación, la suma de todas las C_i debe ser cero. Totalizando las C_i por repeticiones típicas, como se ilustra en el Cuadro 7, se calcula la suma de cuadrados debida a la componente b:

$$SC(\textit{componente } b) = \frac{\Sigma C_i^2}{rpq(q-1)} \quad \frac{\sum\limits_i (\Sigma C_i)^2}{rp^2q(q-1)}$$

$$= \frac{53^2+(-284)^2+\ldots+92^2}{2\text{x}3\text{x}3\text{x}2} - \frac{47^2+(-178)^2+131^2}{2\text{x}9\text{x}3\text{x}2}$$

$$= 6309.44.$$

5. Con los resultados anteriores se construye el Cuadro 8 del análisis de varianza, donde la suma de cuadrados debida a bloques dentro de repeticiones eliminando tratamientos, es la suma de las sumas de cuadrados debidas a las componentes a y b.

Si el cuadrado medio debido a bloques (dentro de repeticiones) eliminando tratamientos, E_b, es igual o menor que el cuadrado medio del error intrabloque, E_e, el análisis debería completarse como si el experimento fuera de bloques al azar.

6. Si E_b es mayor que E_e se calcula el factor de ponderación:

Cuadro 8. Análisis de varianza de un látice duplicado

Fuentes de variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios
Repeticiones	5	1091.65	
Bloques (dentro de reps.) eliminando tratamientos	12	16500.77	1375.06= E_b
Componente *a*	6	10191.33	
Componente *b*	6	6309.44	
Tratamientos ignorando bloques	8	9016.93	
Error (intrabloque)	28	12474.08	445.50= E_e
Total corregido	53	39083.43	

$$\mu = \frac{r(E_b - E_e)}{p\{r(q-1)E_b+(r-1)E_e\}}$$

$$= \frac{2(1375.06-445.50)}{3(2x2x1375.06+445.50)} = 0.10423$$

Multiplicando las C_i por μ se obtienen las correcciones debidas a los diferentes bloques del esquema básico. En el ejemplo, las cantidades μC_i aparecen en la última columna del Cuadro 8.

7. Usando las μC_i apropiadas, se obtienen los totales corregidos de tratamientos, por medio de la fórmula:

$$\hat{T}= T+\mu C_I+\mu C_{II}+\ldots+ \mu C_q.$$

Así, para el tratamiento 1 se tiene:

$$\hat{T}_1= T_1+\mu C_1+\mu C_4+\mu C_7$$

$$= 256+5.52-14.80+6.36= 253.08.$$

El cálculo completo de las T_j se muestra en el Cuadro 9. Para obtener las medias corregidas, las T_j se dividen entre qr.

Cuadro 9. Cálculo de las medias de tratamientos corregidas por bloques

Tratamientos	Totales T_j	Correcciones μC_i I	II	III	Total Corregido	Media Corregida
1	256	+ 5.52	-14.80	+6.36	253.08	42.18
2	389	+ 5.52	-18.34	-2.29	373.89	62.18
3	392	+ 5.52	+14.59	+9.59	421.70	70.28
4	191	-29.60	-14.80	+9.59	156.19	26.03
5	373	-29.60	-18.34	+6.36	331.42	55.24
6	190	-29.60	+14.59	-2.29	172.70	28.78
7	308	+28.98	-14.80	-2.29	319.89	53.32
8	370	+28.98	-18.34	+9.59	390.23	65.04
9	260	+28.98	+14.59	+6.36	309.93	51.66
	G= 2729				2729.03	

8. Una prueba de F para la hipótesis de nulidad de los efectos de tratamientos, se obtiene construyendo el análisis de varianza del Cuadro 10, donde $SC(TEB)$, la suma de cuadrados debida a tratamientos eliminando bloques, se obtiene por diferencia Puesto que $F_{0.05}(8,28)= 2.29$, es menor que la F calculada (= 2.85), entonces se rechaza la hipótesis de efectos nulos de tratamientos, aceptándose que éstos producen efectos diferentes.

Ahora, si $w'= (qr-1)/(qrE_b-E_e)$ y $w= 1/E_e$, entonces la varianza de la diferencia entre dos medias de tratamientos que aparecen juntos en un mismo bloque, es:

$$\frac{2}{pr}\left\{\frac{q-1}{w'+(p-1)w}+\frac{p-(q-1)}{qw}\right\}. \qquad (1)$$

De manera similar, la varianza de la diferencia entre dos medias de tratamientos que no aparecen juntos en un mismo bloque, es:

$$\frac{2}{pr}\left\{\frac{q}{w'+(q-1)w}+\frac{p-1}{qw}\right\}. \qquad (2)$$

Cuadro 10. Análisis de varianza para tratamientos eliminando bloques

Fuentes de variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios	F Calculada
Repeticiones	5	1091.65		
Bloques (dentro de repeticiones) ignorando tratamientos	12	15345.11		
Tratamientos eliminando Bloques	8	10172.59	1271.57	2.85**
Error (intrabloque)	28	12474.08	445.50	
Total	53	39083.43		

*Significancia al 5%.

Análisis de series de látices

Supóngase ahora que el experimento de la Figura 7, se ensaya en una localidad (primera localidad) y que el experimento de la Figura 8, se ensaya en otra (segunda localidad). El conjunto de los dos experimentos es un par de látices triples similares, en el sentido que constituyen dos réplicas del mismo esquema básico. El análisis combinado de los dos experimentos, es muy parecido al análisis de los látices con réplicas del esquema básico, habiendo algunas diferencias en el procedimiento. Para aclarar la situación, consideraremos el análisis de los experimentos de las Figuras 7 y 8, suponiendo que éstos se han ensayado en dos localidades distintas. El método de análisis sigue los pasos descritos a continuación:

1. Analícese cada experimento individualmente en la forma expuesta en líneas previas así, en el Cuadro 11 se presenta el análisis de varianza para bloques eliminando tratamientos, del experimento de la Figura 8. De esta manera se obtienen dos estimadores de la varianza de error intrabloque. El estimador combinado será la media ponderada de los estimadores individuales, ponderando sobre los grados de libertad. Así, la suma de cuadrados del error combinado, es igual a la suma de las sumas de cuadrados de los errores individuales. Para el ejemplo se tiene:

$$SCE_{Comb} = SCE_1 + SCE_2$$
$$= 4837.15+3482.48= 8319.63$$

donde: SCE_{comb} es la suma de cuadrados del error combinado, en tanto que SCE_1 y SCE_2, son las sumas de cuadrados de los errores del experimento en la primera y se-

Cuadro 11. Análisis de varianza para bloques eliminando tratamientos (segunda localidad)

Fuentes de variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios
Repeticiones	2	833.19	
Bloques (dentro de repeticiones) eliminando tratamientos	6	2822.32	470.39= E_b
Tratamientos ignorando bloques	8	12171.19	
Error intrabloque	10	3482.48	348.25= E_e
Total	26	19309.19	

gunda localidades, respectivamente. Los grados de libertad del error combinado, serán iguales a la suma de los grados de libertad de los errores individuales (10 +10= 20 en este caso).

2. Analícense los dos experimentos como si se tuvieran dos réplicas del esquema básico, en la forma descrita en lasección análisis de series de látices: Así, se produce un análisis de varianza para tratamientos eliminando bloques, como el del Cuadro 10 para el ejemplo ilustrativo. La parte importante de este Cuadro es *SC(TEB)*, la suma de cuadrados debida a tratamientos eliminando bloques.

3. Con los resultados anteriores se construye el análisis de varianza combinado que se presenta en el Cuadro 12. Este da pruebas exactas para tratamientos y para la interacción tratamientos x experimentos. Las medias de tratamientos corregidas son las que se obtienen en el paso 2, en tanto que el estimador combinado de la varianza de error, E_e= 415.98 del Cuadro 12, es el valor que se inserta en las fórmulas (1) y (2) de la tercera sección, para el cálculo de las varianzas.

REFERENCIAS

Cochran, W.G. and G.M. Cox. 1957. *Experimental Designs*. John Wiley, Nueva York, N.Y.

Kempthorne, O. 1952. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley, Nueva York, N.Y.

Martínez G., A. 1988. *Diseños Experimentales. Métodos y Elementos de Teoría.* Editorial Trillas, México.

Cuadro 12. Análisis de varianza de dos látices similares

Fuentes de Variación	Grados de libertad	Sumas de cuadrados	Cuadrados medios	F Calculada
Experimentos	1	1091.65		
Repeticiones dentro de experimentos	4			
Bloques (dentro de repeticiones) ignorando tratamientos	12	15345.11		
Tratamientos eliminando bloques*	8	10172.59	1271.57	3.06
Tratamientos x experimentos	8	4154.44 (por diferencia)	518.06	1.25
Error combinado	20	8319.63	415.98= E_e	
Total	53	39083.43		

*SC(TEB)= 10172.59 se toma de la Tabla 13.