

ECUACIONES DINÁMICAS DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE E ÍNDICE DE SITIO PARA *Pinus patula* SCHIEDE ex SCHLTDL. & CHAM.

DYNAMIC EQUATIONS OF GROWTH IN DOMINANT HEIGHT AND SITE INDEX FOR *Pinus patula* SCHIEDE ex SCHLTDL. & CHAM.

Adan Nava-Nava¹, Wenceslao Santiago-García^{2*}, Gerardo Rodríguez-Ortiz³, Héctor M. De los Santos-Posadas⁴, Faustino Ruiz-Aquino², Elías Santiago-García⁵ y Mario E. Suárez-Mota²

¹Universidad de la Sierra Juárez (UNSIJ), Maestría en Ciencias en Conservación de los Recursos Forestales, Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México. ²UNSIJ, División de Estudios de Postgrado-Instituto de Estudios Ambientales, Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México. ³Instituto Tecnológico del Valle de Oaxaca, División de Estudios de Posgrado e Investigación, Xoxocotlán, Oaxaca, México. ⁴Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo, Posgrado en Ciencias Forestales, Texcoco, Estado de México, México. ⁵Dirección Técnica Forestal de la Comunidad de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México.

*Autor de correspondencia (wsantiago@unsij.edu.mx)

RESUMEN

La aplicación de silvicultura intensiva en el manejo forestal sustentable requiere de herramientas cuantitativas eficientes para estimar de manera adecuada los patrones de crecimiento de los árboles y rodales. El desarrollo de modelos matemáticos con bases científicas representa un insumo vital para realizar proyecciones de crecimiento y rendimiento de especies forestales comerciales a través del tiempo. El objetivo de este estudio fue ajustar ecuaciones dinámicas de diferencia algebraica (ADA) y diferencia algebraica generalizada (GADA) para crecimiento en altura dominante e índice de sitio en *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. que crece en rodales coetáneos de Ixtlán de Juárez, Oaxaca. Los datos usados provinieron de 66 sitios permanentes de muestreo establecidos en 2015 y remedidos en 2016 y 2017. Las ecuaciones se ajustaron mediante el método iterativo anidado, que es una técnica invariante de la edad base. Los indicadores estadísticos de bondad de ajuste, los análisis gráficos y la capacidad predictiva de los modelos sugieren que la mejor ecuación para modelar el crecimiento en altura dominante es la formulación GADA derivada del modelo de Bertalanffy-Richards. La altura dominante promedio a la edad base de 40 años fue de 29 m. El modelo tipo GADA propuesto permitirá estimar adecuadamente la productividad de los rodales de *P. patula*. Los enfoques empleados para modelar el crecimiento en altura dominante demuestran ser metodologías eficientes para generar herramientas biométricas de apoyo en la toma de decisiones del manejo forestal para predecir la producción actual y futura.

Palabras clave: *Pinus patula*, calidad de sitio, diferencia algebraica, diferencia algebraica generalizada, silvicultura intensiva.

SUMMARY

The application of intensive silviculture in sustainable forest management requires efficient quantitative tools to adequately estimate growth patterns of trees and stands. The development of scientifically-based mathematical models represents a vital input for making projections of growth and yield over time for commercial forest species. The aim of this study was to fit dynamic equations of algebraic difference (ADA) and generalized algebraic difference (GADA) approaches for growth in dominant height and site index in *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. growing in even-aged stands at Ixtlán de Juárez, Oaxaca. The data used came from 66 permanent sampling sites established in 2015 and re-measured in 2016 and 2017. The equations were fitted using the nested iterative procedure, which is a base-age-invariant technique. The statistical indicators of goodness-of-fit, graphical analyses

and predictive capacity of the models suggest that the best equation to model the dominant height growth was the GADA formulation derived from the Bertalanffy-Richards model. The average dominant height at the base age of 40 years was 29 m. The GADA-type model will allow to adequately estimate the productivity of *P. patula* stands. The approaches used to model the dominant height growth are efficient techniques to develop biometric tools to support decision-making in forest management to predict current and future production.

Index words: *Pinus patula*, site quality, algebraic difference approach, generalized algebraic difference approach, intensive silviculture.

INTRODUCCIÓN

La descripción correcta del patrón de crecimiento en altura dominante a través de modelos matemáticos permite clasificar el potencial productivo (calidad de estación) de rodales y bosques, al determinar el índice de sitio (IS), lo que representa una herramienta fundamental para el manejo y conservación de los recursos forestales. El IS se define como la altura de los árboles dominantes o codominantes a una edad base o de referencia (Clutter *et al.*, 1983; Skovsgaard y Vanclay, 2008).

La calidad de estación se refiere a la capacidad de un sitio forestal (rodal) para sustentar el crecimiento de cierta cantidad de árboles o de cualquier otro tipo de vegetación (Van Laar y Akça, 2007), donde la mejor calidad acumula mayor biomasa, razón por la que el potencial de un rodal está estrechamente relacionado con el volumen maderable medido en la corta final (Clutter *et al.*, 1983).

La evaluación de la calidad del sitio requiere de un modelo que no sólo represente la relación altura-edad, sino el comportamiento de esta relación y que permita calificar la productividad de los sitios con base en su productividad mediante los patrones de crecimiento derivados de las

curvas de crecimiento obtenidas a partir de esta relación funcional (Cieszewski y Bailey, 2000; Torres-Rojo, 2001).

El uso de la altura dominante ha demostrado ser uno de los elementos más idóneos para la determinación del potencial productivo de un rodal, debido a la escasa influencia que ejercen la densidad y los tratamientos silvícolas intermedios (Álvarez *et al.*, 2004). Para cuantificar la productividad existen métodos directos e indirectos donde el *IS*, como método indirecto, utiliza un patrón de crecimiento de altura dominante a una edad de referencia o edad base establecida (Martín-Benito *et al.*, 2008; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015; Vanclay, 1994).

En la modelación forestal se han propuesto diversas metodologías para la construcción de funciones de altura dominante e *IS*. Bailey y Clutter (1974) presentaron una técnica para derivar ecuaciones dinámicas de crecimiento conocida como método de diferencia algebraica (Algebraic Difference Approach, ADA por sus siglas en inglés), que consiste en la sustitución de un parámetro del modelo base para expresarlo como una función del sitio y con esto construir curvas anamórficas y polimórficas. Esta metodología permite que los modelos sean invariantes de la edad base y del camino de simulación, con propiedades lógicas en las proyecciones del crecimiento (Bailey y Clutter, 1974).

Cieszewski y Bailey (2000) propusieron una generalización a las ecuaciones ADA, denominada método de diferencia algebraica generalizada (Generalized Algebraic Difference Approach, GADA por sus siglas en inglés), en el cual, la ecuación base puede ser expandida con más de un parámetro dependiente de la calidad de sitio y las curvas de crecimiento obtenidas son más flexibles. Las ecuaciones dinámicas tienen la estructura general $Y = f(t, t_0, Y_0, \beta)$, donde Y_0 y Y son los valores de la condición inicial y de proyección en función de los valores de la edad t (edad de proyección) y t_0 (edad inicial) y β es el vector de parámetros de la ecuación (Cieszewski, 2001; 2003).

Los componentes de un sistema de predicción y proyección del área basal, diámetro, volumen y mortalidad se relacionan de manera directa con el crecimiento en altura dominante (Hall y Bailey, 2001). Se debe tener en cuenta que el patrón de crecimiento en altura dominante afectará de forma instantánea la proyección de las variables y la precisión de las estimaciones del sistema (Santiago-García *et al.*, 2015); por tanto, una correcta estimación de la altura dominante, basada en ecuaciones de *IS*, no sesgadas y precisas, es fundamental para modelar el crecimiento y rendimiento de las masas forestales (Vargas-Larreta *et al.*, 2013).

En el programa de manejo forestal de Ixtlán de Juárez autorizado en 2015 (STF, 2015) la clasificación de la productividad de los rodales de *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. se realizó con el modelo anamórfico de Chapman-Richards, el cual fue ajustado con información de sitios temporales de muestreo y el método de la curva guía; sin embargo, para lograr una estimación más eficiente del potencial productivo de los rodales se requieren datos remedidos en sitios permanentes o de análisis troncales que permitan utilizar enfoques para modelar de manera dinámica el crecimiento de la altura dominante y las tasas de cambio específicas de cada sitio forestal o por árbol individual.

Pérez-López *et al.* (2017) y Castillo-López *et al.* (2018) generaron en el área de estudio ecuaciones dinámicas de *IS* para *P. patula* con datos de sitios permanentes y de análisis troncales, respectivamente. La ecuación desarrollada por Pérez-López *et al.* (2017) fue generada con datos de dos inventarios consecutivos en 66 parcelas permanentes medidas en 2015 y 2016. Durante 2017 se realizó una tercera remediación de las parcelas, lo que permite ampliar el intervalo de aplicación del modelo y flexibilizar las curvas de crecimiento.

El objetivo de este estudio fue ajustar ecuaciones dinámicas de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para rodales coetáneos de *P. patula* en Ixtlán de Juárez, Oaxaca y realizar una comparación de la mejor ecuación obtenida con las ecuaciones previas desarrolladas para la especie en el área de estudio. La hipótesis fue que un patrón de crecimiento con polimorfismo asintótico describe mejor el crecimiento en altura dominante de *P. patula*, dada la variabilidad natural de los rodales con manejo forestal.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio

El estudio se realizó en rodales de *P. patula* localizados en bosques de la comunidad de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, entre las coordenadas geográficas 17° 23' 0.50" y 17° 23' 0.58" latitud N y 96° 28' 45" y 96° 28' 53" longitud O, a una altitud promedio de 2780 m. *Pinus patula* es la especie que tiene mayor distribución en el predio, con aproximadamente 5000 ha como especie dominante, es de crecimiento rápido y posee un interés comercial alto para la región (Castellanos-Bolaños *et al.*, 2008). El predio, gestionado de forma comunitaria, abarca 19,310.14 ha de superficie.

Datos dasométricos

La base de datos que se utilizó fue generada a partir de tres mediciones en 66 sitios permanentes de muestreo de 400 m², las cuales se realizaron en 2015, 2016 y 2017; además, se utilizó una base de datos de 80 sitios de intervalo establecidos en 2007 y remedidos en 2008, con la finalidad de tener mayor representatividad del área de estudio y ampliar el intervalo de edades, que varió de cinco a 76 años.

Las variables registradas en campo fueron diámetro normal de todos los árboles dentro de la parcela con una forcípula (Mantrax Blue®, Haglöf, Sweden) y la altura total de al menos ocho individuos por sitio con clinómetro electrónico (HCC Clinometer Compass®, Haglöf, Sweden), de los cuales cuatro se identificaron como dominantes, de acuerdo con el concepto de altura dominante que emplea los 100 árboles más gruesos por hectárea (Alder, 1980; Assmann, 1970).

Los 146 sitios permitieron obtener un intervalo amplio de distribución de la muestra (5-76 años) con heterogeneidad alta, lo cual permitió mejor apalancamiento de los modelos. El conjunto de datos se caracterizó por tener una edad promedio de 28.1 ± 16.5 años, con valores mínimo de cinco y máximo de 76 años, la altura dominante promedio fue de 21.5 ± 8.9 m, con un mínimo de 4.2 y de 39.7 m como altura máxima.

Ecuaciones dinámicas

En este estudio se utilizaron ecuaciones polimórficas con asíntotas comunes y variables (tipo ADA y GADA). Los modelos base que se ensayaron han sido documentados en investigaciones sobre biometría forestal; son flexibles, tienen un punto de inflexión y tendencia a alcanzar una asíntota horizontal (Hernández-Cuevas *et al.*, 2018; Kiviste *et al.*, 2002; Krumland y Eng, 2005; Rojo-Alboreca *et al.*, 2017). En los Cuadros 1 y 2 se presentan las ecuaciones ajustadas a los datos.

Ajuste de los parámetros

La técnica de ajuste empleada en la estimación de parámetros de los modelos fue un método invariante con respecto a la edad de referencia (base-age invariant, BAI por sus siglas en inglés), denominado método iterativo anidado (Tait *et al.*, 1988), el cual se utilizó como criterio para lograr la estabilización de los parámetros globales, de tal forma que el error medio cuadrático del modelo entre dos iteraciones fuera menor de 0.0001 (Vargas-Larreta *et al.*, 2010). El método estima los efectos específicos del

sitio y asume que siempre existen errores aleatorios y de medición en los datos, los cuales deben ser modelados (Cieszewski, 2003). El ajuste de las ecuaciones se realizó con el procedimiento MODEL de SAS/ETS® 9.3 (SAS Institute, 2011).

Para reducir los efectos por heterocedasticidad, la varianza del error fue asumida como una función de potencia de la altura predicha (Diéguez-Aranda *et al.*, 2005; Huang *et al.*, 2000). El factor de ponderación utilizado fue $w_i = \hat{H}_i^k$, donde k es una constante que tomó el valor de 0.5, para lograr la homogeneidad de los residuales y la consistencia de los estimadores de los parámetros (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015).

Indicadores de ajuste

La bondad de ajuste de las ecuaciones se analizó mediante el análisis numérico y gráfico de los residuales. Los estadísticos utilizados fueron coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros (R^2_{adj}), raíz del error cuadrático medio (RECM), sesgo promedio absoluto (\bar{E}) y criterio de información de Akaike (AIC) (Basuki *et al.*, 2009; Zhao *et al.*, 2007); la autocorrelación de los residuales de los modelos fue medida con el estadístico Durbin-Watson (dw) (Durbin y Watson, 1951).

La significancia de los parámetros se evaluó mediante la prueba t -Student, bajo $H_0: \beta_i = 0, b_i = 0$ y $H_1: \beta_i \neq 0, b_i \neq 0$ con un valor de significancia de $\alpha = 0.05$ (Infante y Zárate, 2012) y se realizó un análisis gráfico de las ecuaciones ajustadas con la finalidad de verificar su capacidad predictiva (Goelz y Burk, 1992; Sharma *et al.*, 2011).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Ajuste de modelos

Los estadísticos de bondad de ajuste para las seis ecuaciones dinámicas mostraron resultados satisfactorios, las ecuaciones explican 99.8 % de la varianza total observada en la altura dominante, con un error aproximado de 0.33 y 0.34 m para las ecuaciones ADA y GADA, respectivamente; asimismo, todos los estimadores de los parámetros resultaron diferentes de cero a un nivel de significancia del 5 % ($P < 0.0001$) (Cuadro 3).

Los estadísticos de bondad de ajuste (RECM, R^2_{adj} , AIC) mostraron que el modelo de Korf (M1) polimórfico (β_i) es el más apropiado para modelar la altura dominante bajo el enfoque ADA; sin embargo, las curvas de crecimiento generadas (Figura 1a) no cubren en su totalidad los datos en las calidades de estación altas.

Cuadro 1. Ecuaciones dinámicas bajo el enfoque ADA.

Modelo base	Modelo de proyección (ADA)/Referencia
Korf (Lundqvist, 1957)	Polimórfico (β_1) (M1)/(Rojo-Alboreca <i>et al.</i> , 2017)
$Y_0 = \beta_0 \cdot \exp(-\beta_1 t_0 \cdot^{-\beta_2})$	$Y_0 = \beta_0 \left(\frac{Y_0}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\beta_2}}$
Hossfeld IV (Hossfeld, 1822)	Polimórfico (β_2) (M2)/(Hernández-Cuevas <i>et al.</i> , 2018)
$Y_0 = \frac{\beta_0}{1 + \exp(\beta_1) \cdot \exp(-\beta_2 \cdot \ln(t_0))}$	$Y = \frac{\beta_0}{1 + \exp(\beta_1) \cdot \exp \left[\left(\frac{\ln \left(\frac{\beta_0 - Y_0}{Y_0 \cdot \exp \beta_1} \right)}{\ln t_0} \right) \cdot \ln(t) \right]}$
Levakovic II (Kiviste <i>et al.</i> , 2002)	Polimórfico (β_1) (M3)/(Pérez-López <i>et al.</i> , 2017)
$Y_0 = \beta_0 \left(\frac{t_0}{\beta_1 + t_0} \right)^{\beta_2}$	$Y = \beta_0 \cdot \left[\frac{t}{t_0 \cdot \left[-1 + (Y_0 / \beta_0)^{-1/\beta_2} \right] + t} \right]^{\beta_2}$

Y_0 : altura dominante (m) a la edad t_0 ; Y : altura dominante (m) a la edad t ; t_0 : edad inicial (años); t : edad de proyección (años); β_1 : parámetros a estimar.

A pesar del ajuste preciso, los modelos Korf (M1) polimórfico (β_1) y Hossfeld IV (M2) polimórfico (β_2) presentaron algunas inconsistencias en la estimación de las alturas a edades jóvenes y, particularmente, en calidades de sitio altas (M2 = IS: 39 m). Adicionalmente, las curvas trazadas no se apegaron a la tendencia de los datos observados; por tal razón, se descartaron estas ecuaciones para modelar el crecimiento en altura dominante en los rodales de *P. patula* (Figuras 1a y 1b). Resultados similares fueron obtenidos por Corral-Rivas *et al.* (2004) y Diéguez-Aranda *et al.* (2005) al emplear estas ecuaciones en especies como *P. cooperi* C. E. Blanco, *P. durangensis* Martínez, *P. engelmannii* Carrière y *P. sylvestris* L.

Las curvas obtenidas con la ecuación de Levakovic II (M3) polimórfica (β_1) fueron mejores al tener una tendencia similar a la observada y características deseables en una curva de crecimiento (Figura 1c); por esta razón, en el enfoque ADA se eligió dicha curva como la más apropiada para representar el patrón de crecimiento en altura dominante de *P. patula*. Estos resultados son similares a los reportados por Santiago-García *et al.* (2017) y Elfving y Kiviste (1997), quienes destacaron que el modelo es flexible y predice de manera adecuada los datos observados en un sistema de crecimiento y rendimiento maderable. El estadístico de Durbin-Watson mostró que el modelo M3 ($dw = 2.3$) bajo el enfoque ADA no presenta

problemas de autocorrelación; es decir, los estimadores de los parámetros son eficientes e insesgados; además, las curvas de crecimiento presentaron una tendencia biológica más realista al cubrir adecuadamente la variabilidad de la muestra.

Las curvas obtenidas con los modelos bajo el enfoque GADA mostraron un patrón de crecimiento más apegado a la trayectoria de los datos observados que las ecuaciones ADA. Por otro lado, la distribución de los residuales estandarizados presentó un comportamiento adecuado para ambos enfoques (Figura 2); sin embargo, los indicadores de bondad de ajuste indicaron que los modelos de Bertalanffy-Richards (M4) y de Hossfeld IV (M5) fueron los mejores al presentar características razonables y una tendencia biológica deseable en las curvas, además de cubrir completamente el intervalo de alturas de la muestra (Figuras 1d y 1e); no obstante, el modelo de Bertalanffy-Richards (M4) mostró mayor capacidad para modelar el patrón de crecimiento en altura dominante, y la corrección de la heterocedasticidad generó como resultado que los residuales estandarizados fueran homogéneos (Figura 2d); además, la prueba de Durbin-Watson reveló que los residuales no se encuentran correlacionados ($dw = 2.3$) (Cuadro 3). Estos resultados son similares a los reportados en los trabajos de Corral-Rivas *et al.* (2004), Vargas-Larreta *et al.* (2013) y Rojo-Alboreca *et al.* (2017),

Cuadro 2. Ecuaciones dinámicas bajo el enfoque GADA.

Modelo base	Parámetro relacionado al sitio	Solución para X_0 con valores iniciales (Y_0, t_0)/Referencia
Bertalanffy (1949; 1957) - Richards (1959) $Y_0 = a_1 [1 - \exp(-a_2 t_0)]^{a_3}$	$a_1 = \exp(X_0)$ $a_3 = b_2 + b_3 / X_0$	Ecuación dinámica (M4)/(Krumland y Eng, 2005) $X_0 = \frac{1}{2} \{ \ln(Y_0) - b_2 L_2 + \sqrt{[\ln(Y_0)(-b_2 L_2)]^2 - 4b_3 L_2} \}$ Donde $L_0 = \ln [1 - \exp (-b_1 t_0)]$ $Y = Y_0 \left[\frac{1 - \exp (-b_1 t)}{1 - \exp (-b_1 t_0)} \right]^{b_2 + b_3 / X_0}$
Hossfeld IV (Hossfeld, 1822) $Y_0 = \frac{a_1}{1 + \exp(a_2) \cdot \exp(-a_3 \cdot \ln(t_0))}$	$a_1 = b_1 + X_0$ $a_3 = b_2 / X_0$	Ecuación dinámica (M5)/(Hernández-Cuevas et al., 2018) $X_0 = \frac{1}{2} [Y_0 - b_1 + \sqrt{(Y_0 - b_1)^2 + 4b_2 Y_0 t_0^{-b_3}}]$ $Y = \frac{b_1 + X_0}{1 + b_2 / X_0 t^{-b_3}}$
Korf (Lundqvist, 1957) $Y_0 = a_1 \exp(-a_2 t_0^{-a_3})$	$a_1 = \exp(X_0)$ $a_2 = b_1 + b_2 / X_0$	Ecuación dinámica (M6)/(Rojo-Alboreca et al., 2017) $X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-b_3} (b_1 + t_0^{b_3} \ln(Y_0) + \sqrt{4b_2 t_0^{b_3} + (-b_1 - t_0^{b_3} \ln(Y_0))^2})$ $Y = \exp(X_0) \exp(-(b_1 + b_2/X_0)t^{-b_3})$

Y_0 = altura dominante (m) a edad t_0 , Y : altura dominante (m) a la edad t , t_0 = edad inicial (años), t : edad de proyección (años), a_i = parámetros en la ecuación base, b_i = parámetros globales en la ecuación dinámica (formulación GADA).

quienes obtuvieron curvas ADA y GADA con tendencia biológica deseable para estimar la productividad forestal en especies como *P. cooperi* C. E. Blanco, *P. pseudostrobus* Lindl., *P. halepensis* Mill., entre otras.

En los últimos años las metodologías ADA y GADA se han empleado para la modelación del crecimiento en altura dominante en el área de estudio; Hernández-Cuevas et al. (2018) ajustaron modelos de crecimiento ADA y GADA a partir de datos de análisis troncal de *P. ayacahuite* Ehrenb. ex Schltdl., y concluyeron que los modelos de Hossfeld IV bajo el enfoque GADA y Chapman-Richards polimórfico tipo ADA (β_2) fueron los más apropiados para clasificar la productividad de esta especie. Por otro lado, Castillo-López et al. (2018) generaron curvas dinámicas de índice de sitio tipo GADA con el modelo de Von Bertalanffy (1949; 1957) para *P. oaxacana* Mirov, *P. douglasiana* Martínez, *P. patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. y *P. pseudostrobus* Lindl. a nivel de la Unidad de Manejo Forestal (UMAFOR) 2001 que abarca la región de la Sierra Norte del estado de Oaxaca, México. Estos estudios demuestran que el enfoque GADA es una de las metodologías más utilizadas en la actualidad

para modelar el crecimiento en altura dominante; asimismo, el enfoque ADA ha brindado resultados satisfactorios porque las ecuaciones dinámicas construidas con esta metodología para *P. patula* han permitido construir tablas de rendimiento de densidad variable y simular infinidad de escenarios silvícolas (Santiago-García et al., 2017).

Las curvas generadas con los modelos M3 (ADA) y M4 (GADA) describen el crecimiento en altura dominante de manera apropiada porque cubren adecuadamente la trayectoria de los datos observados; además, las curvas generadas bajo el enfoque GADA son curvas polimórficas más flexibles, con tasa de crecimiento y potencialidades variables (Figura 3).

Con base en los indicadores de bondad de ajuste, las curvas de crecimiento de *IS* generadas, los gráficos de residuales, y por la estructura compacta de la ecuación, el modelo M4 es el más apropiado para modelar el patrón de crecimiento en altura dominante de los rodales de *P. patula* en los bosques de Ixtlán de Juárez, Oaxaca (Cuadro 3; Figuras 1d y 2d).

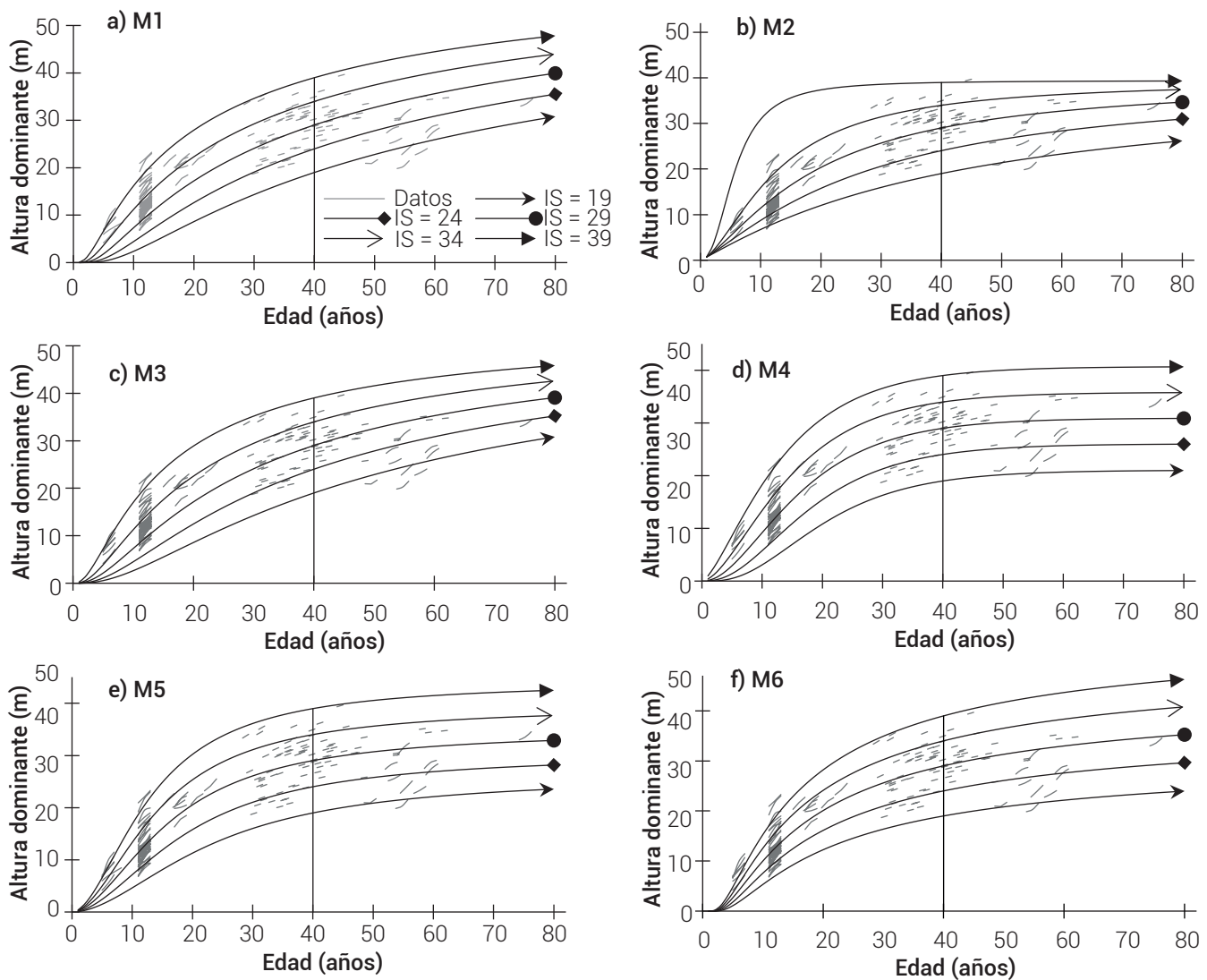


Figura 1. Curvas de índice de sitio para *Pinus patula* a la edad base de 40 años: modelos ADA (M1-M3) y Modelos GADA (M4-M6).

De esta manera, las curvas de índice de sitio generadas con el procedimiento GADA (Figura 1d) permitirán clasificar los bosques naturales de *P. patula* de acuerdo con su potencial productivo, y planificar las actividades silvícolas (McKenney y Pedlar, 2003) al hacer posible la predicción del crecimiento y rendimiento maderable a nivel de rodal, por categoría diamétrica y árbol individual (Santiago-García et al., 2014; Santiago-García et al., 2017).

Comparación de ecuaciones de altura dominante para *Pinus patula*

La obtención de datos recientes permitió desarrollar una ecuación dinámica de crecimiento de altura dominante para clasificar el potencial productivo de los rodales de *P.*

patula en Ixtlán de Juárez, Oaxaca. La ecuación propuesta por Pérez-López et al. (2017) (*Modelo previo*), que expresa el índice de sitio, utiliza una edad base de 40 años, por lo que para efectos comparativos en este estudio se utilizó la misma edad de referencia; la comparación gráfica entre el modelo *previo* y el modelo M4 (*actual*) se muestra en la Figura 4. Al respecto, el modelo *actual* generó un patrón de crecimiento más coherente con los datos observados que el modelo *previo* (Figura 4).

Las curvas polimórficas y con polimorfismo asintótico generadas por Pérez-López et al. (2017) y Castillo-López et al. (2018), respectivamente, donde las primeras subestiman y las segundas sobreestiman la altura de los árboles antes y después de la edad base (Figura 4). Esto era

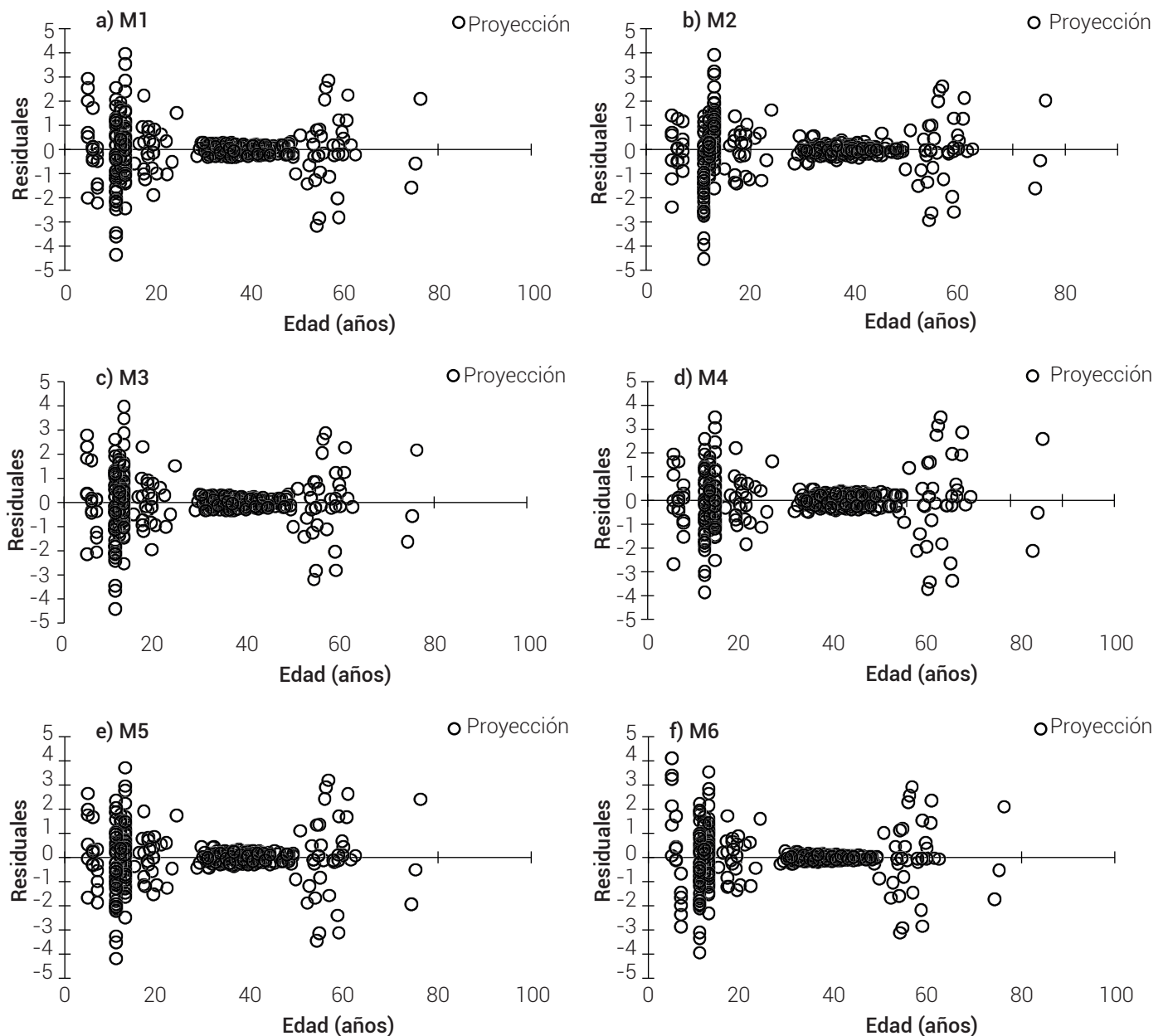


Figura 2. Gráficos de residuales estandarizados de las ecuaciones dinámicas ajustadas: modelos ADA (M1-M3) y modelos GADA (M4-M6).

de esperarse para el modelo *previo*, porque tales curvas se construyeron con menor información bajo la metodología ADA, en tanto que en el modelo de Castillo-López *et al.* (2018) se empleó el enfoque GADA con información de análisis troncales, pero un hecho importante a destacar es que se desarrolló a nivel de UMAFOR, por lo que la escala espacial es mucho mayor que la usada en este estudio; por tanto, se esperaría que una ecuación a nivel local permita modelar mejor las condiciones específicas del sitio.

Es importante definir la ecuación que describa mejor el comportamiento del crecimiento en altura dominante,

puesto que, al interrelacionarse con un sistema de crecimiento y rendimiento permite predecir la edad óptima de cosecha; así mismo, cuando se combina con herramientas de manejo de la densidad permite definir posibilidades maderables en aclareos y optimizar el turno de los rodales (Santiago-García *et al.*, 2013).

Con el modelo de Castillo-López *et al.* (2018) hay una sub- y sobreestimación a edades jóvenes; sin embargo, el modelo propuesto por Pérez-López *et al.* (2017) es ligeramente mejor en calidades bajas y altas (Figura 4). Este tipo de situaciones es común en la modelación

Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste y parámetros estimados de las ecuaciones dinámicas de altura dominante para *Pinus patula*.

Modelo		Valor	SD	Valor t	P > t	RECM	R ² _{adj}	AIC	\bar{E}	DW
ADA.M1	β_0	66.0688	0.5143	128.45	< 0.0001	0.30	0.9988	-850.36	0.00005	2.3
	β_2	0.7075	0.0051	138.59	< 0.0001					
ADA.M2	β_0	39.4207	0.0865	455.88	<0.0001	0.38	0.9982	-697.80	0.01194	2.5
	β_1	4.0882	0.0069	589.37	<0.0001					
ADA.M3	β_0	54.2913	0.1614	336.35	<0.0001	0.30	0.9988	-852.76	0.00032	2.3
	β_2	3.3155	0.0688	48.18	<0.0001					
GADA.M4	b_1	0.0899	0.0008	112.26	< 0.0001	0.33	0.9986	-781.77	0.00125	2.3
	b_2	-8.3678	0.2118	-39.5	< 0.0001					
	b_3	36.6950	0.7849	46.75	< 0.0001					
GADA.M5	b_1	16.2696	0.513	31.72	< 0.0001	0.34	0.9986	-778.34	0.00076	2.3
	b_2	2939.081	84.3011	34.86	< 0.0001					
	b_3	1.8165	0.0088	207.03	< 0.0001					
GADA.M6	b_1	-11.2988	1.0641	-10.62	< 0.0001	0.36	0.9984	-738.48	0.00279	2.4
	b_2	88.9546	4.4425	20.02	< 0.0001					
	b_3	0.9191	0.0075	122.37	< 0.0001					

SD: error estándar, RECM: raíz del error cuadrático medio, R²_{adj}: coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros, \bar{E} : sesgo promedio absoluto, AIC: criterio de información de Akaike, DW: estadístico de Durbin-Watson.

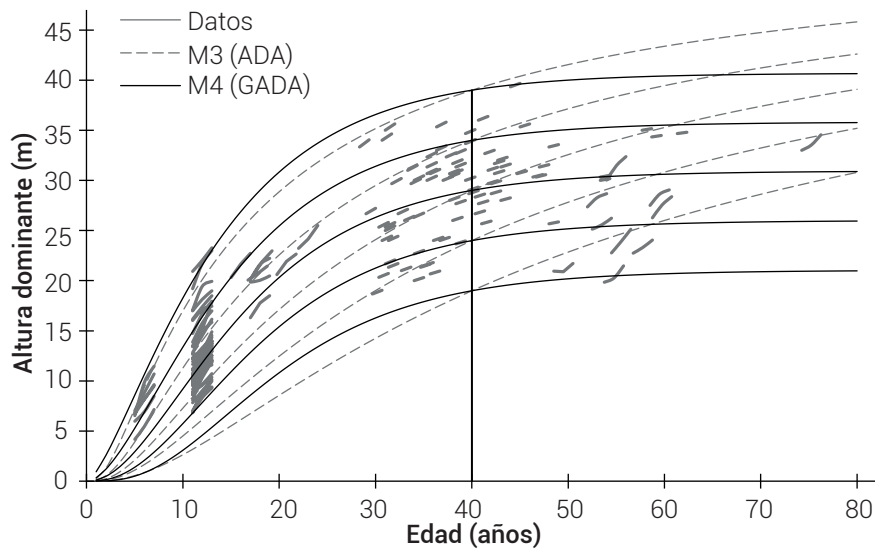


Figura 3. Curvas polimórficas obtenidas bajo el enfoque ADA (M3) y de polimorfismo complejo con GADA (M4) a una edad base de 40 años.

forestal, debido a que los extremos climáticos anormales pueden influir más en la altura total de árboles jóvenes que en árboles adultos, y con frecuencia es determinado por factores distintos a la calidad de sitio (Huang, 1999); al respecto, Vargas-Larreta *et al.* (2013) señalaron que no es deseable seleccionar una edad de referencia demasiado

joven para clasificar la calidad del sitio de los rodales.

La ecuación *actual* (M4) genera predicciones mejores en la amplitud de la base de datos utilizada, en comparación con las ecuaciones previas contrastadas (Castillo-López *et al.*, 2018; Pérez-López *et al.*, 2017) (Figura 4). El propósito

mayor de modelar el crecimiento en altura dominante no es la predicción de la altura, sino la selección de un patrón de crecimiento de la altura dominante que el rodal puede seguir durante todo su desarrollo (Clutter et al., 1983).

CONCLUSIONES

La ecuación propuesta en este estudio bajo el enfoque GADA describe de manera adecuada el patrón de crecimiento en altura dominante para los datos de *Pinus patula*. Al clasificar la productividad de rodales de *P. patula* en los bosques de Ixtlán de Juárez, Oaxaca se recomienda el uso del modelo Bertalanffy-Richards tipo GADA (M4); esta herramienta ayudará a definir estrategias en el corto y largo plazo para planificar mejor los tratamientos silvícolas del manejo forestal y con ello lograr la conservación de los recursos forestales.

AGRADECIMIENTOS

A la comunidad de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, por las facilidades otorgadas para la realización de esta investigación.

BIBLIOGRAFÍA

- Alder D. (1980) Estimación del Volumen Forestal y Predicción del Rendimiento con Referencia Especial a los Trópicos. Vol. 2. Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación. Roma, Italia. 118 p.
- Álvarez G. J. G., M. Barrio A., U. Diéguez A. y A. Rojo A. (2004) Metodología para la construcción de curvas de calidad de estación. *Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales* 18:303-309.
- Assmann E. (1970) The Principles of Forest Yield Study. Pergamon Press. Oxford, UK. 506 p.
- Bailey R. L. and J. Clutter (1974) Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science* 20:155-159, <https://doi.org/10.1093/forestscience/20.2.155>
- Basuki T. M., P. E. van Laake, A. K. Skidmore and Y. A. Hussin (2009) Allometric equations for estimating the above-ground biomass in tropical lowland *Dipterocarp* forests. *Forest Ecology and Management* 257:1684-1694, <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2009.01.027>
- Castellanos-Bolaños J. F., E. J. Treviño-Garza, O. A. Aguirre-Calderón, J. Jiménez-Pérez, M. Musalem-Santiago y R. López-Aguillón (2008) Estructura de bosques de pino pátula bajo manejo en Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México. *Madera y Bosques* 14:51-63, <https://doi.org/10.21829/myb.2008.1421212>
- Castillo-López A., W. Santiago-García, B. Vargas-Larreta, G. Quiñonez-Barraza, R. Solís-Moreno y J. J. Corral-Rivas (2018) Modelos dinámicos de índice de sitio para cuatro especies de pino en Oaxaca. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 9:4-27, <https://doi.org/10.29298/rmcf.v9i49.185>
- Cieszewski C. J. (2001) Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Canadian Journal of Forest Research* 31:165-173, <https://doi.org/10.1139/x00-132>
- Cieszewski C. J. (2003) Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV Function $Y^2 = (ax^m)/(c+x^{m-1})$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. *Forest Science* 49:539-554, <https://doi.org/10.1093/forestscience/49.4.539>
- Cieszewski C. J. and R. L. Bailey (2000) Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science* 46:116-126, <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.1.116>
- Clutter J. L., J. C. Forston, L. V. Pienaar, G. H. Brister and R. L. Bailey (1983) Timber Management: A Quantitative Approach. John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA. 333 p.
- Corral-Rivas J. J., J. G. Álvarez-González, A. D. Ruiz-González and K. von Gadow (2004) Compatible height and site index models for five pine species in El Salto, Durango (Mexico). *Forest Ecology and Management* 201:145-160, <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2004.05.060>
- Diéguez-Aranda U., J. G. Álvarez-González, M. Barrio-Anta and A. Rojo-Alboreca (2005) Site quality equations for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia (northwestern Spain). *Annals of Forest*

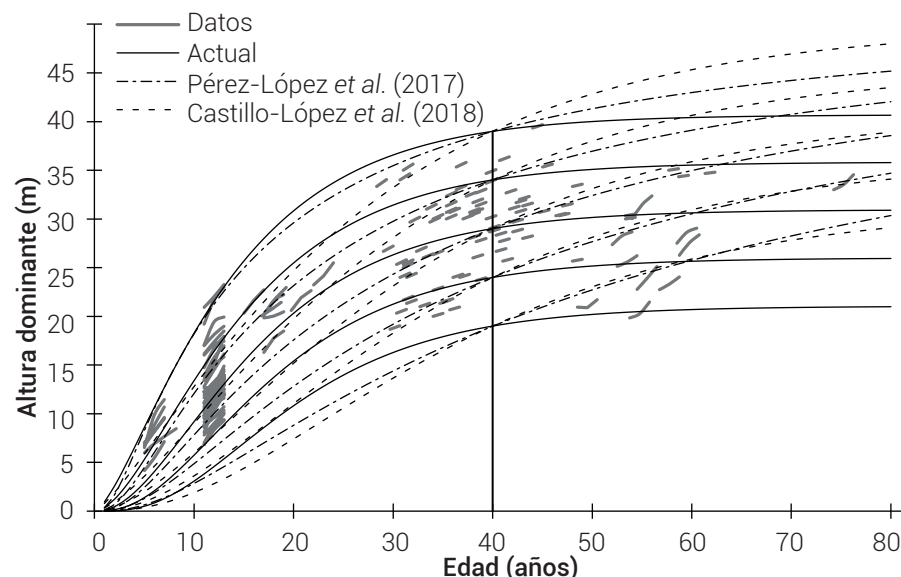


Figura 4. Comparación de las curvas de crecimiento en altura dominante con ecuaciones obtenidas en investigaciones previas y la actual a una edad base de 40 años.

- Science 62:143-152, <https://doi.org/10.1051/forest:2005006>
- Durbín J. and G. S. Watson (1951) Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58:1-19, <https://doi.org/10.1093/biomet/58.1.1>
- Elfving B. and A. Kiviste (1997) Construction of site index equations for *Pinus sylvestris* L. using permanent plot data in Sweden. *Forest Ecology and Management* 98:125-134, [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(97\)00077-7](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(97)00077-7)
- Goelz J. C. G. and T. E. Burk (1992) Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Canadian Journal of Forest Research* 22:776-784, <https://doi.org/10.1139/x92-106>
- Hall D. B. and R. L. Bailey (2001) Modeling and prediction of forest growth variables based on multilevel nonlinear mixed models. *Forest Science* 47:311-321, <https://doi.org/10.1093/forestscience/47.3.311>
- Hernández-Cuevas M., W. Santiago-García, H. M. De los Santos-Posadas, P. Martínez-Antúnez y F. Ruiz-Aquino (2018) Modelos de crecimiento en altura dominante e índices de sitio para *Pinus ayacahuite* Ehren. *Agrociencia* 52:437-453.
- Hossfeld J. W. (1822) *Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten*. Dritter Band. Nabu Press. Gotha, Deutschland. 310 p.
- Huang S. (1999) Development of compatible height and site index models for young and mature stands within an ecosystem-based management framework. In: *Empirical and Process-Based Models for Forest Tree and Stand Growth Simulation*. A. Amaro and M. Tomé (eds.). Edições Salamandra-Novas Tecnologias. Lisbon, Portugal. pp:61-78.
- Huang S., D. Price, D. Morgan and K. Peck (2000) Kozak's variable exponent taper equation regionalized for white spruce in Alberta. *Western Journal of Applied Forestry* 15:75-85, <https://doi.org/10.1093/wjaf/15.2.75>
- Infante G. S. y G. P. Zárate de L. (2012) *Métodos Estadísticos: Un Enfoque Interdisciplinario*. Tercera edición. Colegio de Postgraduados. Texcoco, México. 624 p.
- Kiviste A., J. G. Álvarez-González, A. R. Alboreca y A. D. Ruiz (2002) *Funciones de Crecimiento en el Ámbito Forestal*. Monografías INIA Forestal Núm. 4. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Madrid, España. 190 p.
- Krumland B. and H. Eng (2005) *Site Index Systems for Major Young-Growth Forest and Woodland Species in Northern California*. Forestry Report N° 4. California Department of Forestry and Fire Protection. Sacramento, California. 220 p.
- Lundqvist B. (1957) On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in northern Sweden. *Medd Fran Statens Skogforsk Band* 47:1-64.
- Martín-Benito D., G. Gea-Izquierdo, M. del Río and I. Cañellas (2008) Long-term trends in dominant-height growth of black pine using dynamic models. *Forest Ecology and Management* 256:1230-1238, <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2008.06.024>
- McKenney D. W. and J. H. Pedlar (2003) Spatial models of site index based on climate and soil properties for two boreal tree species in Ontario, Canada. *Forest Ecology and Management* 175:497-507, [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(02\)00186-X](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(02)00186-X)
- Pérez-López E., W. Santiago-García, G. Quiñonez-Barraza, G. Rodríguez-Ortiz y F. Ruiz-Aquino (2017) Ecuaciones dinámicas: altura dominante e índice de sitio para *Pinus patula* Schiede ex Schlechtendal & Chamisso. In: *Avances en Investigación Agrícola, Pecuaria, Forestal, Acuícola, Pesquería, Desarrollo Rural, Transferencia de Tecnología, Biotecnología, Ambiente, Recursos Naturales y Cambio Climático-2017*. V. J. C. Vinay, V. A. Esqueda E., O. H. Tosquy V., A. Ríos U., M. V. Vázquez H. y C. Perdomo M. (comps.). INIFAP. CP. UV. UACH. AVC. ITBOCA. ITUG. ITSH. UPH. Medellín, Veracruz, México. pp:1123-1131.
- Quiñonez-Barraza G., H. M. De los Santos-Posadas, F. Cruz-Cobos, A. Velázquez-Martínez, G. Ángeles-Pérez y G. Ramírez-Valverde (2015) Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia* 49:439-454.
- Richards F. J. (1959) A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10:290-301, <https://doi.org/10.1093/jxb/10.2.290>
- Royo-Alboreca A., A. M. Cabanillas-Saldaña, M. Barrio-Anta, E. Notivol-Paíno and J. J. Gorgoso-Varela (2017) Site index curves for natural Aleppo pine forests in the central Ebro valley (Spain). *Madera y Bosques* 23:143-159, <https://doi.org/10.21829/myb.2017.231495>
- Santiago-García W., E. Pérez-López, G. Quiñonez-Barraza, G. Rodríguez-Ortiz, E. Santiago-García, F. Ruiz-Aquino and J. C. Tamarit-Urias (2017) A dynamic system of growth and yield equations for *Pinus patula*. *Forests* 8:465, <https://doi.org/10.3390/f8120465>
- Santiago-García W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. J. Corral-Rivas, J. R. Valdez-Lazalde and D. H. Del Valle-Paniagua (2014) Prediction of *Pinus patula* Schl. et Cham. timber yield through diameter distribution models. *Agrociencia* 48:87-101.
- Santiago-García W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. R. Valdez-Lazalde, D. H. Del Valle-Paniagua and J. J. Corral-Rivas (2013) Self-thinning and density management diagrams for *Pinus patula* fitted under the stochastic frontier regression approach. *Agrociencia* 47:75-89.
- Santiago-García W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. R. Valdez-Lazalde, J. J. Corral-Rivas, G. Rodríguez-Ortiz y E. Santiago-García (2015) Modelos de crecimiento y rendimiento de totalidad del rodal para *Pinus patula*. *Madera y Bosques* 21:95-110, <https://doi.org/10.21829/myb.2015.213459>
- SAS Institute (2011) *SAS/ETS® 9.3 User's Guide*. SAS Institute Inc. Cary, North Carolina, USA. 3344 p.
- Sharma R. P., A. Brunner, T. Eid and B. H. Øyen (2011) Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age errors. *Forest Ecology and Management* 262:2162-2175, <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2011.07.037>
- Skovsgaard J. P. and J. K. Vanclay (2008) Forest site productivity: a review of the evolution of dendrometric concepts for even-aged stands. *Forestry* 81:13-31, <https://doi.org/10.1093/forestry/cpm041>
- STF, Servicios Técnicos Forestales de Ixtlán de Juárez (2015) Programa de manejo forestal para el aprovechamiento y conservación de los recursos forestales maderables de Ixtlán de Juárez. Ciclo de corta 2015-2024. Servicios Técnicos Forestales de Ixtlán de Juárez. Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México. 423 p.
- Tait D. E., C. J. Cieszewski and I. E. Bella (1988) The stand dynamics of lodgepole pine. *Canadian Journal of Forest Research* 18:1255-1260, <https://doi.org/10.1139/x88-193>
- Torres-Royo J. M. (2001) Curvas de índice de sitio de forma y escala variables en investigación forestal. *Agrociencia* 35:87-98.
- Vanclay J. K. (1994) *Modelling Forest Growth and Yield: Applications to Mixed Tropical Forests*. CAB International. Wallingford, UK. 312 p.
- Van Laar, A. and A. Akça (2007) *Forest Mensuration. Managing Forest Ecosystems*. Vol. 13. Springer. Dordrecht, The Netherlands. 383 p.
- Vargas-Larreta B., J. G. Álvarez-González, J. J. Corral-Rivas y O. A. Aguirre-Calderón (2010) Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Revista Fitotecnia Mexicana* 33:343-351, <https://doi.org/10.35196/rfm.2010.4.343>
- Vargas-Larreta B., O. A. Aguirre-Calderón, J. J. Corral-Rivas, F. Crecente-Campo and U. Diéguez-Aranda (2013) A dominant height growth and site index model for *Pinus pseudostrobus* Lindl. in northeastern Mexico. *Agrociencia* 47:91-106.
- Von Bertalanffy L. (1949) Problems of organic growth. *Nature* 163:156-158, <https://doi.org/10.1038/163156a0>
- Von Bertalanffy L. (1957) Quantitative laws in metabolism and growth. *The Quarterly Review of Biology* 32:217-231, <https://doi.org/10.1086/401873>
- Zhao D., B. Borders, M. Wang and M. Kane (2007) Modeling mortality of second rotation loblolly pine plantations in the Piedmont/Upper Coastal Plain and Lower Coastal Plain of the southern United States. *Forest Ecology and Management* 252:132-143, <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2007.06.030>